Examen "Méthodes à noyaux"

Master M2 MVA

ENS Cachan

Durée: 2h

Jean-Philippe Vert

30 mars 2005

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1 : B_n-splines

On définit la convolution de deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du,$$

lorsque cette intégrale a un sens.

Soit la fonction :

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1, \end{cases}$$

et $B_n = I^{\star n}$ pour $n \in \mathbb{N}_*$ (c'est-à-dire la fonction I convoluée n fois avec elle-même : $B_1 = I, B_2 = I \star I, B_3 = I \star I \star I$, etc...).

La fonction $k(x,y) = B_n(x-y)$ est-elle un noyau défini positif sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Si oui, décrire l'espace de Hilbert à noyau reproduisant associé.

Exercice 2 : Noyaux conditionnellement définis positifs

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble. Une fonction $k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est appelée *conditionnellement définie positive* (c.d.p.) si elle est symétrique et vérifie :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j k(x_i, x_j) \geq 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{X}^n$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ avec $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$.

2.1. Montrer qu'une fonction définie positive (d.p.) est c.d.p.

2.2. Montrer qu'un fonction constante est c.d.p. mais pas forcément d.p.

2.3. Montrer que si $\mathcal{X}$ est un espace de Hilbert, alors $k(x,y) = -||x-y||^2$ est c.d.p. mais pas d.p.

2.4. Soit $\mathcal{X}$ un ensemble non vide, et $x_0 \in \mathcal{X}$ un point. Pour toute fonction $k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, soit la fonction $\tilde{k} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{k}(x,y) = k(x,y) - k(x_0,x) - k(x_0,y) + k(x_0,x_0).$$

Montrer que k est c.d.p. si et seulement si $\tilde{k}$ est d.p.

2.5. En déduire que si k est un noyau c.d.p. sur $\mathcal{X}$ tel que $k(x,x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, alors il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et une application $\Phi : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{H}$ tels que, pour tout $x, y \in \mathcal{X}$:

$$k(x,y) = -\| \Phi(x) - \Phi(y) \|^2.$$

2.6. Déduire de **2.4.** que si k est c.d.p., alors la fonction $\exp(tk(x,y))$ est d.p. pour tout $t \geq 0$

2.7. Réciproquement, si la fonction $\exp(tk(x,y))$ est d.p. pour tout $t \geq 0$, montrer que k est c.d.p.

2.8. Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^+$, et $g : D(\mu) \to \mathbb{R}$ la fonction :

$$g(x) = \int_0^{\infty} \left(e^{\lambda x} - 1\right) d\mu(\lambda),$$

où $D(\mu) \subset \mathbb{R}^+$ est l'ensemble des valeurs x pour lesquelles cette intégrale converge.

2.8.a. Si k est un noyau c.d.p. sur un espace $\mathcal{X}$, et si $k(\mathcal{X} \times \mathcal{X}) \subset D(\mu)$, montrer que $g \circ k$ est également c.d.p. sur $\mathcal{X}$. (Suggestion : on pourra dans un premier temps considérer $g(x) = e^{\lambda x} - 1$)

2.8.b. Montrer que si k est c.d.p. et si $x_0 \in \mathcal{X}$ alors le noyau :

$$\hat{k}(x,y) = g\left(k(x,y) + k(x_0,x_0)\right) - g\left(k(x,x_0) + k(y,x_0)\right)$$

est d.p. (en supposant que chaque terme soit bien défini). (Suggestion : on pourra démontrer et utiliser le fait que si k est d.p., alors $e^k - 1$ est également d.p.).

2.9. On rappelle que la fonction Gamma est définie pour tout $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

2.9.a. Montrer que pour $0 < \alpha < 1$ et $z \geq 0$,

$$z^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda z}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha+1}}.$$

2.9.b. En déduire que si k est c.d.p. sur $\mathcal{X}$ et $k(x,x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, alors $-(-k)^\alpha$ est bien définie et c.d.p. pour $0 \leq \alpha \leq 1$.