REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, SÉRIE ROUGE

J. BARANGER
M. DUC-JACQUET

# Brève communication. Matrices tridiagonales symétriques et matrices factorisables

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*, tome 5, n° 3 (1971), p. 61-66.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_61_0>

R.I.R.O.
(5e année, N° R-3, 1971, p. 61-66)

# *Brèves communications*

## MATRICES TRIDIAGONALES SYMETRIQUES ET MATRICES FACTORISABLES

par J. BARANGER [1] et M. DUC-JACQUET [1]

Sommaire. — *Les matrices factorisables, c'est-à-dire telles que*

$$M = (m_{ij}) \begin{cases} m_{ij} = a_i b_j & i \leqslant j \\ m_{ij} = m_{ji} & a = (a_1, \ldots, a_n) \qquad b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

*ont une inverse tridiagonale calculable explicitement.*

*Réciproquement, les matrices tridiagonales symétriques ont une inverse factorisable, les vecteurs a et b pouvant etre obtenus par un algorithme utilisant 6 × n multiplications-divisions environ.*

*Les matrices factorisables et les matrices tridiagonales symétriques peuvent constituer deux classes intéressantes de matrices test.*

1° Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ $2n$ nombres réels (ou complexes) tels que

$$a_i \neq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

$$b_n \neq 0 \tag{1.2}$$

et si l'on pose $v_i = \dfrac{b_i}{a_i}$

$$v_{i+1} \neq v_i \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.3}$$

(1) Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Grenoble.

*Définition*

On appelle matrice factorisable toute matrice de la forme :

$$(1.4) \qquad M = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire telle que

$$m_{ij} = a_ib_j \quad \text{pour} \quad j \geqslant i$$

et

$$m_{ji} = m_{ij}$$

Les conditions (1.1) (1.2) et (1.3) sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que $M$ soit régulière. En effet :

$$(1.5) \qquad M = DL^t\Lambda LD$$

où

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & \text{O} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{O} & & a_{n-1} & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \text{O} & \\ 1 & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 & & & & \\ & v_2 - v_3 & & \text{O} & \\ & & \ddots & & \\ \text{O} & & & v_{n-1} - v_n & \\ & & & & v_n \end{pmatrix}$$

**Théorème 1**

Soit $M$ une matrice factorisable inversible (i.e. vérifiant (1.1) à (1.4)).

Son inverse est la matrice tridiagonale

$$N = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & O \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & & & & \\ & & & & \beta_{n-1} \\ O & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

avec

$$\alpha_1 = -\frac{a_2}{a_1}\frac{1}{\mu_{1,2}}$$

$$\alpha_i = \frac{\mu_{i-1,i+1}}{\mu_{i-1,i}\mu_{i,i+1}} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

(1.7)

$$\alpha_n = -\frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{1}{\mu_{n-1,n}}$$

$$\beta_i = \frac{1}{\mu_{i,i+1}} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

avec

$$\mu_{i,j} = a_i a_j (v_j - v_i).$$

Démonstration immédiate en utilisant (1.5).

2° On ne peut pas donner des formules aussi simples que (1.7) pour l'inversion de (1.6) mais on a

**Théorème 2**

Soit $N$ une matrice tridiagonale symétrique, régulière, de la forme (1.6) telle que

$$\beta_i \neq 0 \qquad i = 1, \ldots, n-1 \tag{2.1}$$

Son inverse est une matrice factorisable définie par (1.4) où

(2.2)

$$a_1 = 1$$

$$a_p = (-1)^{p-1}\frac{D_{p-1}}{\beta_{p-1}\cdots\beta_1} \qquad p = 2, \ldots, n$$

$$b_1 = \frac{D'_n}{D_n}$$

$$b_p = \frac{(-1)^{p-1}}{\beta_{p-1}\cdots\beta_1}\left(\frac{D'_n}{D_n}D_{p-1} - D'_{p-1}\right) \qquad p = 2, \ldots, n$$

avec

$$D_p = \text{dét} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \bigcirc \\ \beta_1 & & & \\ & & & \beta_{p-1} \\ \bigcirc & & \beta_{p-1} & \alpha_p \end{pmatrix} \qquad p = 1, \dots, n$$

$$D'_p = \text{dét} \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & & \bigcirc \\ \beta_2 & & & \\ & & & \beta_{p-1} \\ \bigcirc & & \beta_{p-1} & \alpha_p \end{pmatrix} \qquad p = 2, \dots, n$$

Démonstration au paragraphe suivant.

3° Donnons un algorithme de calcul de $N^{-1}$.

On cherche cet inverse sous la forme $M$ de (1.4).

La relation $NM = I$ donne les équations

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \alpha_1 a_1 b_1 + \beta_1 a_1 b_2 = 1 & \\ \alpha_1 a_1 b_p + \beta_1 a_2 b_p = 0 & p = 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \beta_{q-1} a_{q-1} b_p + \alpha_q a_q b_p + \beta_q a_{q+1} b_p = 0 & q < p \\ \beta_{q-1} a_{q-1} b_q + \alpha_q a_q b_q + \beta_q a_q b_{q+1} = 1 & \\ \beta_{q-1} a_p b_{q-1} + \alpha_q a_p b_q + \beta_q a_p b_{q+1} = 0 & q > p \end{cases}$$

(pour ces trois relations $p$ et $q$ sont compris entre 2 et $n - 1$)

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \beta_{n-1} a_p b_{n-1} + \alpha_n a_p b_n = 0 & p = 1, \dots, n-1 \\ \beta_{n-1} a_{n-1} b_n + \alpha_n a_n b_n = 1. & \end{cases}$$

**Lemme :** Le système (3.1) à (3.3) est équivalent à

$$(3.4) \qquad \begin{cases} a_1(\alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2) = 1 \\ \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 = 0 \end{cases}$$

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \beta_{q-1} b_{q-1} + \alpha_q b_q + \beta_q b_{q+1} = 0 \\ \beta_{q-1} a_{q-1} + \alpha_q a_q + \beta_q a_{q+1} = 0 \end{cases} \qquad q = 2, \dots, n-1$$

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \beta_{n-1}b_{n-1} + \alpha_n b_n = 0 \\ b_n(\beta_{n-1}a_{n-1} + \alpha_n a_n) = 1. \end{cases}$$

*Démonstration :* Évidemment (3.1) équivaut à (3.4), (3.3) à (3.6) et (3.2) implique (3.5).

Reste à vérifier que les solutions de (3.4), (3.5), (3.6) vérifient la deuxième relation de (3.2). On pose

$$a_1 = 1, \qquad b_1 \text{ arbitraire}$$

et on montre par récurrence que

$$(3.7)\qquad \begin{cases} a_p = \dfrac{(-1)^{p-1}}{\beta_{p-1}\ \cdots\ \beta_1} D_{p-1} & p = 2, \ldots, n \\ b_p = \dfrac{(-1)^{p-1}}{\beta_{p-1}\ \cdots\ \beta_1} (b_1 D_{p-1} - D'_{p-1}) & p = 2, \ldots, n \end{cases}$$

Utilisant enfin la première relation (3.6) on obtient

$$b_1 = \frac{D'_n}{D_n}$$

La deuxième relation (3.2) se ramène à

$$\beta_{q-1}(a_{q-1}b_q - a_q b_{q-1}) = 1$$

que l'on transforme par (3.7) en

$$\beta_{q-1}(D_{q-2}D'_{q-1} - D_{q-1}D'_{q-2}) = (\beta_{q-2}\ \cdots\ \beta_1)^2$$

qui se vérifie facilement par récurrence grâce aux relations

$$(3.8)\qquad \begin{cases} D_q = \alpha_q D_{q-1} - \beta_{q-1}^2 D_{q-2} & q \geqslant 3 \\ D'_q = \alpha_q D'_{q-1} - \beta_{q-1}^2 D'_{q-2} & q \geqslant 4 \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration du lemme et du théorème 2.

*Description de l'algorithme d'inversion de N*

Il est tiré de (3.4) à (3.6)

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} a_1 \\ a_{q+1} = \dfrac{-\alpha_q a_q - \beta_{q-1}a_{q-1}}{\beta_q} & q = 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{1}{\beta_{n-1}a_{n-1} + \alpha_n a_n} \\ b_{n-1} = -\dfrac{\alpha_n}{\beta_{n-1}} b_n \\ b_{q-1} = \dfrac{-\alpha_q a_q - \beta_q b_{q+1}}{\beta_{q-1}} \qquad q = n-1, \ldots, 2 \end{cases}$$

*Coût du calcul de a, b*

$6n - 5$ multiplications-divisions

$2n - 1$ additions.

On obtient les deux vecteurs $a$ et $b$ de $R^n$ qui « factorisent » $N^{-1}$. Pour avoir explicitement $N^{-1}$ il reste à effectuer $\frac{n(n+1)}{2}$ multiplications.

Ainsi $N^{-1}$ peut être mémorisée à l'aide de $2n$ mémoires, ce qui est très important dans la pratique.

REMARQUE

Une éventuelle singularité de $N$ est détectée, lors du calcul de $b_n$.

Si $\beta_{n-1}a_{n-1} + \alpha_n a_n = 0$ $N$ est singulière, le calcul de $b_n$ est impossible.

Le professeur Householder nous a signalé que la propriété établie dans les théorèmes 1 et 2 a été démontrée dans [5] et [4] puis dans [3]. Ces trois publications n'étant pas aisées à trouver il nous a semblé bon de publier ce résultat (la démonstration en est d'ailleurs différente) que nous utilisons en optimisation (cf. [1] et [2]) et qui est utilisé également en statistique (cf. [6]).

Pour le cas tridiagonal non symétrique voir une méthode voisine dans [7].

Enfin la partie algorithmique est nouvelle.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BARANGER J. (1970). Approximation optimale de la somme d'une série *C.R.A.S.*, t. 271, Série A, 149-152.

[2] DUC-JACQUET M. (1970). Meilleures formules d'intégration dans certains espaces de Hilbert de fonctions, *C.R.A.S.*, t. 271, Série A, 795-797.

[3] GREENBERG G. B. and SARHAN A. E. (1959). Matrix inversion, its interest and application in analysis of data, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 54, 755-766.

[4] GUTTMAN L. (1955). A generalized simplex for factor analysis, *Psychometrika*, 20, 173-195.

[5] UTIKA Yoshimasa (1955). Characterization of 2-type diagonal matrices with an application to order statistics, *Journal of Hokkaido College of Art and Literature*, 6, 66-75

[6] UPPULURI V. R. R. and CARPENTER J. A. (1969). The inverse of a matrix occurring in first order moring average models, *Indian J. of Stat.*, A 31 part. 1, 79-82.

[7] UPPULURI V. R. R. and CARPENTER J. A. (1970). An inversion method for band matrices, *J. of Math Analysis and Applications* 31, n° 3, 554-558.